Шәкір Айдос

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

4-дәріс. Интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп. Шешімнің жалғыздығы

Дәрістің мақсаты – интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің шешімінің жалғыздығын көрсету

Негізгі сұрақтар:

1. Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз қойылымы
2. Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есепке эквивалентті локалды емес тура есеп
3. Локалды емес тура есептің әлсіз шешімінің жалғыздығы
4. Локалды емес тура есептің әлді шешімінің жалғыздығы

Бұл дәрісте интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған кері есептің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің жалғыздығы зерттелінеді.

1 Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

1.1 Есептің қойылымы

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T], T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, s)ds - \nabla p = f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \tag{1.1}$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\boldsymbol{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \tag{1.2}$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega \tag{1.3}$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=0,\quad (\mathbf{x},t)\in\Gamma_T \tag{1.4}$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int_\Omega \mathbf{u}\boldsymbol{\omega}d\mathbf{x}=e(t),\ t\in[0,T] \tag{1.5}$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=(u_1,u_2,...,u_d)-$ сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x},t)-$ сұйықтың қысымы, ал ν және $\varkappa$ оң сандары, сәйкесінше, сұйықтың кинематикалық тұтқырлық және релаксациясының коэффициенттері, $\mathbf{F}(\mathbf{x},t):=f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$, $e(t)$, $K(t)$ белгілі функциялар.

Анықтама 1.1. (1.1)-(1.5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

1. $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V})\cap\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$, $\mathbf{u}_t\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$, $f(t)\in L^2[0,T]$;
2. $\Omega-$да барлық дерлік жерде $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$ бастапқы шартты;
3. Кез келген $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{V}$ және барлық $t\in(0,T)$ үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big((\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}+\varkappa\,(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}\Big)+\nu\,(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}=\\&f(t)\,(\mathbf{g}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}-((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}-\\&\int\limits_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}\,ds.\end{aligned}\tag{1.6}$$

қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x},t),f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Анықтама 1.2. (1.1)-(1.5) кері есебінің әлді шешімі деп

1. $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))\cap\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_t\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$, $f(t)\in L^2[0,T]$;
2. әрбір теңдеуді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын

$(\mathbf{u}(\mathbf{x},t),f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Ескерту 1.1. Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [1] мақаладағыдай $\mathbf{u}$ және f функциялары белгілі болғаннан кейін де Рамм леммасын қолданып, (1.2) теңдеуден бірмәнді қалпына келтіруге болады.

Кері есепті эквивалентті локалды емес тура есепке келтіру

Айталық, есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын дейік.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}; \tag{1.7}$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{R} : 0 < k_0 < \infty, \quad |g_0(t)| = \left|(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}\right| \geq k_0 > 0, \ \forall t \geq 0; \tag{1.8}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)); \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}, \ e(t) \in W_2^1([0, T]); \tag{1.10}$$

$$(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0); \tag{1.11}$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0,T])} \equiv K_0 < \infty. \tag{1.12}$$

Енді (1.1) теңдеуді $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (1.5) қосымша және (1.8) шартты қолдансақ, онда $f(t)$ функциясы келесі түрде анықталады

$$\begin{gathered} f(t) = \frac{1}{g_0(t)} \Big(e'(t) + \varkappa \left(\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \nu \left(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} - \\ ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \int\limits_0^t K(t-s) \left(\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} ds \Big) := F_1(\mathbf{u}, t). \end{gathered} \tag{1.13}$$

Мұнан соң, (1.13) өрнекті (1.1) теңдеуге қойғансақ, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_t - \varkappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds - \nabla p = \\ F_1(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \ (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \end{gathered} \tag{1.14}$$

теңдеулер жүйесін, (1.3) бастапқы және (1.4) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын локалды емес тура есеп алынады, мұндағы $F_1(\mathbf{u}, t) = f(t)$ функциясы (1.13) өрнекпен анықталады. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебін, сәйкесінше, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есепке алып келдік.

Кері есеп пен локалды емес тура есептің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Лемма 1.1. Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебі (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебіне эквивалентті, яғни $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімі болса, онда $(\mathbf{u}, p)$ жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, $(\mathbf{u}, p)$ функциялары (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болса, онда ол (1.13) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімін береді.

Дәлелдеуі 1.1. 1.1-лемманың дәлелдеуі өткен дәрісте келтірілді. Бұл дәрісте кері есептің шешімнің жалғыздығын дәлелдеуде эквивалентті локалды емес тура есеп қажет болғандықтан қайта жазуға мәжбүр болып тұрмыз.

1.2 Шешімнің жалғыздығы

Теорема 1.1. Айталық, шешімнің бар болуы теореманың шарттары орындалсын. Сонымен қатар, $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ функциялары (1.1)-(1.4), (1.13) есебінің бірдей берілгендері үшін $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ әлсіз (әлді) шешімі болсын. Онда барлық $(x,t) \in Q_{T^*}$ үшін (1.1)-(1.4), (1.13) есебінің әлсіз (әлді) шешім жалғыз болады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$, мұндағы T^*- әлсіз (әлді) шешімнің бар болуының максималды уақыты.

Дәлелдеуі 1.2. $\mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_1$ үшін (1.14) теңдеуді жазып және оларды бір-бірін азайтып, шыққан нәтижені сәйкесінше $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_t$ функцияларына $\mathbf{L}_2(\Omega)$ кеңістігінде скаляр көбейткенде, сәйкес келесі өрнектер алынады

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\
&-((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} - \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s), \nabla\mathbf{u}(t)\right)_{2,\Omega} ds + \\
&\frac{1}{g_0(t)}\Big[\varkappa\left(\nabla\mathbf{u}_t(t), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \nu\left(\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \left((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t)\right)_{2,\Omega} + \\
&\left((\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)\right) + \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} ds\Big]\left(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t)\right)_{2,\Omega},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\
&-\left((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_t(t)\right)_{2,\Omega} - \left((\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla)\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_t(t)\right)_{2,\Omega} - \\
&\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + \frac{1}{g_0(t)}\Big[\varkappa\left(\nabla\mathbf{u}_t(t), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \\
&\nu\left(\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \left((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t)\right) + \\
&\left((\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)\right) + \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} ds\Big]\left(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t(t)\right)_{2,\Omega}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Соңғы алынған теңдіктерді қоссақ, онда төмендегі нәтиже шығады

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2+(\nu+\varkappa)\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right)+\nu\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\\
&\|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2=-((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}(t))_{2,\Omega}+\\
&((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega}+((\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla)\,\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_t)_{2,\Omega}-\\
&\int_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\mathbf{u}(t))_{2,\Omega}\,ds+\frac{1}{g_0(t)}\Big[\varkappa\,(\nabla\mathbf{u}_t(t),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}+\\
&\nu\,(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}+((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\,\omega,\mathbf{u}_1(t))_{2,\Omega}+((\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}(t))+\\
&\left.\int_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\omega)_{2,\Omega}\,ds\right]\,(\mathbf{g}(t),\mathbf{u}(t))_{2,\Omega}+\\
&\int_0^t K(t-s)\nabla\mathbf{u}^n(s)\nabla\mathbf{u}_t^n(t)ds-\frac{1}{g_0(t)}\Big[\varkappa\,(\nabla\mathbf{u}_t,\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}+\\
&\nu\,(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}+((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}_1(t))+((\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}(t))+\\
&\left.\int_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}\,ds\right]\,(\mathbf{g},\mathbf{u}_t(t))_{2,\Omega}=\sum_{i=1}^{7}R_i.
\end{aligned}\tag{1.3}$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерінің көмегімен (1.1) өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$\begin{aligned}
|R_1|=\left|-\left((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_1(t),\,\mathbf{u}(t)\right)_{2,\Omega}\right|\le\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}(t)\|_{4,\Omega}^2\le\\
C(\Omega)\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2,
\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
|R_2|\le\|\mathbf{u}(t)\|_{4,\Omega}\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}_t(t)\|_{4,\Omega}\le\\
\frac{\varepsilon_0}{8}\|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\frac{2C^2}{\varepsilon_0}\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}}^2\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2,
\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
|R_3|\le\|\mathbf{u}_2(t)\|_{4,\Omega}\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}_t(t)\|_{4,\Omega}\le\\
\frac{\varepsilon_0}{8}\|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\frac{2C^2}{\varepsilon_0}\|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2,
\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
|R_4|\le\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}K_0\left(\int_0^t\|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\le\\
\frac{\nu}{2}\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\frac{K_0^2}{2\nu}\int_0^t\|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2\,ds,
\end{aligned}\tag{1.7}$$

$$
\begin{aligned}
&|R_5| \le \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}}{k_0}\|\omega\|_{\mathbf{V}}\left[\varkappa\|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} + \nu\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} +\right.\\
&\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} +\\
&\left.K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le \frac{\|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega}}{2k_0^2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{2,\Omega} +\\
&\frac{\|\omega\|^2_{\mathbf{V}}}{2}\left[\nu\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}_1(t)\|^2_{\mathbf{V}} +\right.\\
&\left.\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}_2(t)\|^2_{\mathbf{V}} + K_0^2\int\limits_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right] +\\
&\frac{\varepsilon_0}{8}\|\mathbf{u}_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{2\varkappa^2}{\varepsilon_0 k_0^2}\|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{2,\Omega}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
|R_6| &\le \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \le\\
&\frac{\varepsilon_0}{8}\|\mathbf{u}_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_0}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds,
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&|R_7| \le \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}\|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}}{k_0}\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}\left[\varkappa\|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} + \nu\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} +\right.\\
&\left.\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} + K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le\\
&\frac{\varepsilon_1}{4}\|\mathbf{u}_t(t)\|^2_{2,\Omega} + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}}}{\varepsilon_1 k_0^2}\cdot
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\nu\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}_1(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}_2(t)\|^2_{\mathbf{V}} +\right.\\
&\left.K_0^2\int\limits_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right] + \frac{\varepsilon_1}{4}\|\mathbf{u}_t(t)\|^2_{2,\Omega} + \frac{\varkappa^2\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathbf{V}}}{\varepsilon_1 k_0^2}\|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega}\|\mathbf{u}_t(t)\|^2_{\mathbf{V}}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Алынған (1.4)-(1.10) бағалауларды (1.3) өрнекке қойғанда, келесі дифференциалдық теңсіздік алынады

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}(t)\|^2_{2,\Omega} + (\varkappa+\nu)\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}}\right) + \nu\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \alpha\|\mathbf{u}_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} +\\
&\beta\|\mathbf{u}_t(t)\|^2_{2,\Omega} \le a_1\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}} + a_2\int\limits_0^t \|\mathbf{u}(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds + a_3\|\mathbf{u}(t)\|^2_{2,\Omega},
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

мұндағы

$$
\alpha := 2\left(\varkappa - \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varkappa^2}{\varepsilon_1 k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathbf{V}}\right),\ \beta := 2\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2}\right);
$$

$$
a_1 := 2C\sup_{t\in[0,T^*]}\|\mathbf{u}_1(t)\|_{2,\Omega} + \frac{4C^2}{\varepsilon_0}\sup_{t\in[0,T^*]}\|\mathbf{u}_1(t)\|^2_{2,\Omega} + \frac{4C^2}{\varepsilon_0}\sup_{t\in[0,T^*]}\|\mathbf{u}_2(t)\|^2_{2,\Omega} +
$$

$$+\left(\frac{2\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2}{\varepsilon_1 k_0^2}+\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\right)\times$$

$$\left(\nu^2+\sup_{t\in[0,T^*]}\|\mathbf{u}_1(t)\|_{2,\Omega}^2+\sup_{t\in[0,T^*]}\|\mathbf{u}_2(t)\|_{2,\Omega}^2\right);$$

$$a_2:=\frac{K_0^2}{\nu}+\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2K_0^2+\frac{2\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2}{\varepsilon_1 k_0^2}K_0^2+\frac{4K_0^2}{\varepsilon_0};$$

$$a_3:=\frac{1}{k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\left(1+\frac{4\varkappa^2}{\varepsilon_0}\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\right).$$

Енді $\mathbf{u}_i,\ i=1,2,$ функциялары және әлсіз шешім үшін алынған бағалауларда $\frac{\varkappa}{k_0^2}\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\le m<2$ шарты кезіндегі $\varepsilon_i, i=0,1$ сәйкес мәнінде α,β,a_1,a_2,a_3 коэффициенттері оң және ақырлы болып табылады. Олай болса, (1.11) өрнекті τ бойынша $0-$ден $t\in[0,T^*]-$ға шейін интегралдасақ, онда келесі теңсіздік қорытылады

$$y(t)\le a\int_0^t y(\tau)d\tau, \tag{1.12}$$

мұндағы

$$y(t):=\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2+(\varkappa+\nu)\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2,\quad a:=\max\left\{\frac{1}{\varkappa+\nu}(a_1+Ta_2),a_3\right\}.$$

1.1-теореманың шарты мен Гронуолл леммасы бойынша (1.12) өрнектен $t\in[0,T^*]$ үшін $y(t)\equiv 0$ тұжырымдалады, яғни $\mathbf{u}_1\equiv\mathbf{u}_2$.

Қорыта келе, әлсіз шешімнің бар болуы туралы 1.1-теореманы (3-дәріс), әлді шешімнің бар болуы туралы 1.2-теореманы (3-дәріс) және шешімнің жалғыздығы туралы 1.1-теореманы ескере отырып, сондай-ақ (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің (1.1)-(1.5) кері есебіне эквиваленттілігі туралы 1.1-леммаға сүйеніп бастапқы қойылған кері есеп үшін келесі нәтижелер тұжырымдалады.

Теорема 1.2. Айталық, (1.7)-(1.12) шарттар орындалсын және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын

$$\frac{\varkappa}{k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\le m<2. \tag{1.13}$$

Онда ақырлы $T_1\in(0,T]$ уақыты табылып, (1.1)-(1.5) кері есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы T_1 мәні кері есептің бастапқы берілгені арқылы анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T_1;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})}^2+\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{V})}^2+\|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})}^2+\|f\|_{L^2[0,T_1]}^2\le C, \tag{1.14}$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Теорема 1.3. Айталық, 1.2-теореманың шарттары және $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ шарт орындалсын. Олай болса, (1.1)-(1.5) кері есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол (1.14) бағалауға қоса

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T_1;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))} + \|\mathbf{u}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))} + \|f\|^2_{L^2[0,T_1]} \leq C < \infty. \tag{1.15}$$

бағалау орынды болады, мұндағы T_1 мәні және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Теорема 1.4. Айталық, 1.2-теореманың шарттары орындалсын. Сонымен қатар, $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ функциялары (1.1)-(1.5) есебінің бірдей берілгендері үшін $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ әлсіз (әлді) шешімі болсын. Онда барлық $(x,t) \in Q_{T^*}$ үшін (1.1)-(1.5) есебінің әлсіз (әлді) шешім жалғыз болады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$, мұндағы T^*- әлсіз (әлді) шешімнің бар болуының максималды уақыты.

Список литературы

[1] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh. The classical Kelvin-Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity. Nonlinearity 34 (2021), no. 5, 3083–3111. 1.1

[2] O.A. Ladyzhenskaya, On the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897.

[3] O.A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II, Nauka, Moscow, 1970.